

РЕЦЕНЗИЯ

на

**на дисертационен труд,
представен за получаване на образователната и
научна степен „доктор“**

Автор на дисертационния труд: редовен докторант **Силви-Мария Тодорова Гюрова**

Тема на дисертационния труд: Стохастични числени методи за оценка на собствени стойности

Област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика

Професионално направление: 4.5. Математика

Докторска програма: Математическо моделиране и приложение на математиката

Рецензент: проф. д-р Михаил Д. Тодоров, секция Диференциални уравнения и математическа физика, ИМИ – БАН, София, зап. 101/04.05.2026 г. на Директора на ИИКТ-БАН“

Кратки биографични данни за дисертанта

Силви-Мария Гюрова е родена през 1995 г. в София. През 2013 г. завършва средно образование - СМГ. В периода 2013-2019 г. следва в ФМИ-СУ и се дипломира последователно като бакалавър и магистър по Приложна математика. Успоредно със следването работи в ИИКТ-БАН последователно като програмист (2013-2017 г.), математик (2017-2019), асистент (2019-2023) и от 2023 г. и досега отново като математик. В периода 2015-2025 г. дисертантката е хоноруван преподавател в ФМИ-СУ, където води семинарни упражнения по стохастични числени методи и симулации, вероятности и статистика, диференциално и интегрално смятане, линейно оптимизиране и др. През 2020 г. е зачислена в редовна докторантура в ИИКТ-БАН, от която е отчислена с право на защита през 2023 г.

Представената дисертация е написана на български език и има обем от 117 стр., формат В5+1/2, в т.ч. увод, 3 глави и заключение, 16 таблици, 15 фигури и библиография от 117 заглавия почти всички на английски език.

1. Актуалност на дисертационния труд

Задачата за намиране на спектъра на квадратни симетрични матрици и в частност оценяване на техните екстремални собствени стойности заема централно място в линейната алгебра поради ключовата си роля в широк кръг проблеми от научен и приложен характер. Такива задачи възникват в квантовата механика, физиката, финансовата математика, машинното обучение, обработката на сигнали. В тензорния анализ и обработката на многомерни данни, максималната собствена стойност и спектралните норми определят поведението на итеративните методи и техниките за регуляризация. Развити са няколко числени подхода за пресмятане на спектъра - директни, итерационни и стохастични. Към директните методи спадат QR декомпозицията и решаването на характеристичния полином при матрици с малка размерност и изчислителна сложност от порядък $O(n^3)$, където n е размерността на матрицата. Основен недостатък на точните методи е, че при матрици с големи размерности, изчисленията с крайна точност водят до натрупване на грешки и оттам невярна числена прогноза за собствените стойности. Итерационните методи имат по-малка изчислителна сложност $O(n^2k)$, (n е размерността на матрицата, k е броят на итерациите), но са бавно сходящи, имат значителни изисквания към паметта и ограничена ефективност при паралелизация. Стохастичните числени методи предлагат ефективна алтернатива, като осигуряват линейна зависимост между размерността на задачата и необходимата памет, както и естествен паралелизъм и относителна лекота на реализация. Макар и с по-бавна сходимост и по-малка точност в сравнение с детерминистичните методи, те позволяват решаването на задачи с много големи размерности и са особено подходящи за оценяване на екстремални собствени стойности на симетрични матрици. Съвременното развитие на високопроизводителните изчислителни системи и разработването на нови хардуерни архитектури предполага търсене и намиране на софтуерни решения, базирани на ефективни стохастични алгоритми за задачи с висока размерност, включително за оценяване на екстремални собствени стойности.

Съвместяването на всички тези дейности изисква еднакво добро познаване на съответен математически инструментариум за аналитична, изчислителна и софтуерна реализация на съответните модели и постановки. Тематиката е с ясен фундамент и с необходимост от конкретни приложения, което е достатъчна обосновка и мотивация за провеждане на изследванията. Всичко това предполага нужната математическа квалификация и знания, които дисертантката несъмнено притежава и умело прилага.

2. Анализ на състоянието на проблема

Задачата за намиране на спектъра а матрици обикновено възниква при решаване на системи от линейни алгебрични уравнения (СЛАУ) и стохастични диференциални уравнения (СДУ). На практика за матрици с големи размерности задачата се редуцира до пресмятане или поне оценка само на екстремалните собствени стойности, които определят числото на обусловеност и ключови свойства на системата. Такива задачи възникват в обработката на

изображения и сигнали, системите за управление, машинното обучение и квантовата механика и пр.

Първите публикации, свързани с Монте Карло (МК) методите в линейната алгебра, датират от 50-те и 60-те години на ХХ век. По това време са широко използвани детерминистични методи като Степенния метод, Итерацията на коефициента на Релей, Резолвентния степенен метод и алгоритъма на Ланцош. Монте Карло методът за оценка на доминиращата собствена стойност е предложен от Соболев през 1973г], а за най-малката собствена стойност - от Михайлов през 1987 г.. Значим принос в развитието на Степенния Монте Карло (СМК) метод имат Димов и Караиванова в периода 1996–2000 г. През следващите десетилетия са разработени итеративни МК и Квази-Монте Карло (КМК) алгоритми за намиране на екстремални собствени стойности, базирани на Степенния и Резолвентния степенен метод. Използването на резолвентната матрица за оценка на най-малката собствена стойност е въведено от Димов и Караиванова през 1998 г. Първите Квази-Монте Карло методи за намиране на екстремални собствени стойности са предложени от Караиванова и Маскани в периода 2001–2003 г. В редица изследвания са използвани КМК методи, базирани на редици с малък дискрепанс, включително редици на Соболев, Холтън и Фор, които осигуряват по-равномерно и детерминистично покритие на пробното пространство. В сравнение със стандартните МК подходи, КМК методите се отличават с по-добра гъвкавост, приложимост към матрици с големи размерности, относителна простота и висока паралелна ефективност. През последните две десетилетия са разработени и анализирани различни стратегии за паралелизация на Монте Карло алгоритми. Тук съществен принос има и групата около проф. Иван Димов. Основна идея в тези разработки е балансирането на стохастичната и систематичната грешка. Разработени са и хибридни Монте Карло алгоритми за матрични пресмятания, включително паралелни реализации за оценка на най-голямата и най-малката собствена стойност на матрици.

Основната цел на дисертационния труд е да се предложат и изследват стохастични числени методи за оценяване на собствени стойности, като се разработят и анализират Монте Карло и рандомизирани Квази-Монте Карло алгоритми за приближено пресмятане на екстремните собствени стойности на симетрични квадратни матрици.

3. Методика на изследванията

Методологията на изследването в дисертационния труд се основава на фундаментални научни резултати от следните области:

- Теория на вероятностите и математическа статистика;
- Математически анализ;
- Числени методи, линейна и изчислителна алгебра, стохастични числени методи (Монте Карло и Квази-Монте Карло методи);
- Дискретна и аналитична теория на числата;
- Алгоритми и структури от данни; програмни кодове, написани на Matlab, C++ с използване на генератори на псевдослучайни числа като MT и MS; библиотеки за рандомизирани редици на Соболев и Холтън.

Част от числените експерименти са извършени на високопроизводителен клъстър, който се състои от 12 сървъра, а редиците на Собол са получени чрез BRODA's Sobol Randomized Sequence Generator.

Основната задача за оценяване на собствени стойности на симетрична матрица се решава с помощта на МК и КМК подходи за числено решаване на многомерни задачи и се прави анализ на характерните грешки за методите.

4. Характеристика и оценка на получените резултати

В Увода е дискутирана актуалността на тематиката, направен е обзор на основните научни резултати в областта, поставени са целите и задачите на дисертационния труд и подробно е описана методологията на изследването. Приносен характер имат Глави 1,2 и 3.

Глава 1 е посветена на разработването на ефективни стохастични степенни алгоритми за намиране на максималната собствена стойност на плътни симетрични матрици. Дефинирана е задачата и са разгледани методите, които се използват за нейното решаване: това са детерминистичният Степенен метод и стохастичният Степенен метод в неговите два варианта - Степенен Монте Карло (СМК) и Степенен Квази-Монте Карло (СКМК) метод. Подробно е описана конструкцията на случайната величина с използване на верига на Марков, като се акцентира на използването на почти оптимални вероятности. Представен е псевдокод на разработените почти оптимални СМК и СКМК алгоритми и са определени условията за балансиране на стохастичната и систематичната грешка.

В **Глава 2** се разглежда задачата за оценяване минималната собствена стойност на симетрични квадратни матрици чрез използване на техните резолвентни матрици. Представен е Резолвентният Степенен метод и неговите стохастични реализации чрез Резолвентен Монте Карло (РМК) и Резолвентен Квази-Монте Карло (РКМК) подход. В главата се изследва ролята на параметрите, влияещи върху сходимостта на безкрайния ред, чрез който се представя резолвентната матрица. Конструирани са почти оптимални РМК и РКМК алгоритми и се изследва балансът на стохастичната и систематична грешка. Този баланс зависи от броя реализации на случайните величини, дължината на веригата на Марков, степента на резолвентната матрица и ускоряващия параметър, включен в представянето на резолвентната матрица като степенен ред. Проведени са числени експерименти с цел оценка на минималната собствена стойност на тестови симетрични матрици.

Глава 3 има приложен характер. В нея са приложени алгоритми от Глава 1 към реална задача от областта на финансовата математика, свързана с оценяване на пазарния риск на инвестиционен портфейл. Оценяването му се извършва чрез максималната собствена стойност на корелационната матрица на портфейла. Намирането на най-голямата собствена стойност се извършва чрез почти оптималните СМК и СКМК алгоритми. При прилагането на почти оптималния СКМК алгоритъм са разгледани два варианта: с разбъркани редици на Собол и Холтън (1) с настройка по „подразбиране“; и с използване на параметри `skip` и `leap`. Проведени са числени експерименти с реални финансови данни, които демонстрират приложимостта и ефективността на предложените алгоритми.

Основните приноси могат да се разделят на две групи:

1. Научни приноси:

- Обосновани и изследвани са Степенният (Резолвентният) Монте Карло метод и рандомизираният Степенен (Резолвентен) Квази-Монте Карло метод за оценяване на екстремални собствени стойности на симетрични матрици. Получени са теоретични оценки за зависимостта между степента на резолвентната матрица и дължината на веригата на Марков в зависимост от ускоряващия параметър и нормата на матрицата;

- Разработени са почти оптимални алгоритми, за които е оценена изчислителната сложност и условията за баланс между стохастичната и систематична грешка. Аргументирано е, че предложените алгоритми водят до намаляване на дисперсията спрямо класическите аналози;

2. Научно-приложни приноси:

- Числените експерименти за оценяване на максималната собствена стойност на плътни симетрични матрици с големи размерности демонстрират превъзходството на почти оптималните алгоритми над класическите им аналози както по точност, така и по изчислителна сложност;

- Числено е показано, че СКМК алгоритмите се нуждаят от 2-3 стъпки повече във веригата на Марков в сравнение със СК алгоритмите. Изборът на генератор на псевдослучайни числа или на разбърканата редица с малък дискрепанс има измерим ефект върху точността и устойчивостта. В разгледаните експерименти МТ е предпочитан пред MS, а редиците на Собол пред редиците на Холтън;

- Числените експерименти за оценяване на минималната собствена стойност показват, че балансът между стохастичната и систематичната грешка зависи от броя на преходите във веригата на Марков, броя реализации на случайните величини $\theta(k)$ и $\theta(k-1)$, степента на резолвентната матрица и параметъра за ускорение. Резултатите, получени с рандомизирана редица на Собол и с МТ генератор за оценяване на минималната собствена стойност на симетрични матрици, демонстрират един и същ порядък;

- Проведени са числени експерименти за оценяване на максималната собствена стойност на две корелационни матрици, която е индикатор за концентрация на пазарния риск. Оценяването е извършено чрез почти оптималния СКМК алгоритъм с МТ/MS генератори на псевдослучайни числа и чрез почти оптималния СКМК алгоритъм, както без допълнителни настройки (default вариант), така и с използване на параметрите skip и leap при разбъркани редици на Собол и Холтън.

- Предложена е практическа задача от областта на финансовата математика за оценяване на пазарния риск на инвестиционни портфейли. Конструиранията корелационна матрица за съответния портфейл е използвана за оценяването на максималната собствена стойност, която е

индикатор за концентрация на пазарния риск. Оценяването се извършва чрез разработените в Глава 1 почти оптимален Степенен МК и Степенен КМК алгоритми, като допълнително Степенният КМК алгоритъм е модифициран чрез използване на параметрите *skip* и *leap*.

5. Преценка на авторската справка

Авторската справка отразява приносите и акцентите в дисертацията като цяло. Приносите имат както научен, така и научно-приложен характер във финансовата математика. Оценявам приносите като колективни, оценявам ролята на научния ръководител, но водещата роля на дисертантката е несъмнена. Всички приноси могат да бъдат причислени към направлението „Обогатяване на съществуващи знания с цел приложение в практиката“. Решаването на подобни задачи изисква сериозна математическа квалификация и умения, както и постоянство и упоритост. Несъмнено дисертантката притежава тези качества, което личи от получените резултати.

6. Критични бележки по трудовете и литературна осведоменост на дисертанта

Дисертацията прави отлично впечатление. Написана е на правилен български език. Изложението е стегнато и логически последователно. Нямам критични бележки по същество. В дисертацията няма доказани собствени теореми, но пък има добре описани алгоритми, както и подробен сравнителен анализ и коректно цитиране на литературните източници, които са използвани. Тук му е мястото да отбележа, че е налице задълбочено познаване на литературата по разглежданите в дисертацията въпроси. Литературната осведоменост на дисертантката се основава на най-нови източници. Налице е също отлична симбиоза и допълване на практически умения и теоретична подготовка.

7. Публикации по дисертацията

Резултатите са докладвани многократно на конференции и семинари у нас и в чужбина. Публикувани са в *Contemporary Mathematics* и *Lecture Notes in Computer Science*. Всички работи са в съавторство с научния ръководител. *Contemporary Mathematics* има $IF = 2.5$ и принадлежи на Q1, *LNCS* има SJR.

Таблица: Справка за трудовете

Статии – 4 бр.	В чужбина - 3 бр. Cont. Math, LNCS, в България 1 бр. NMSCAA'24
Доклади на семинари и международни научни	MCQMC, LCSC, BGSIAM, AMiTaNS

прояви – 5 бр.	
Участие проекти – 5 бр.	1 международен и 4 национални

Дисертантката има участие в 5 научно-изследователски проекта – един международен и 4 национални.

От казаното дотук и след справка с НАЦИД и Допълнителните изисквания на ИИКТ е видно, че тя покрива минималните изисквания за получаване на ОНС „доктор“, а по показател Г значително ги надхвърля. Няма доказано по законоустановения ред плагиатство в представените по конкурса научни трудове.

8. Приложение на резултатите в практиката

Както вече отбелязах налице е отлична симбиоза и допълване на практически умения и теоретична подготовка. Получените в дисертацията резултати имат определено приносен характер към СМК и СКМК и финансовата математика. Основната цел е изграждането на стабилна и изчислително ефективна методологична рамка, която осигурява управляем баланс между систематичната и стохастичната грешка и е приложима при задачи с висока размерност. Успешната реализация и надграждане предполагат решаването на нови интересни задачи.

9. Преценка на автореферата

Авторефератът отразява правилно и пълно съдържанието на дисертационния труд.

10. Лични впечатления

Познавам дисертантката повече от 10 години. Участва няколкократно с доклади и научни съобщения на конференциите АМиТаНС. През 2021 г. беше номинирана от MDPI Axioms за най-добър доклад на млад учен на конференция АМиТаНС.

Заклучение

Отчитайки значимостта на проведените изследвания и след справка с ППЗРАСРБ, Правилника на БАН и специфичните изисквания на ИИКТ, мога да твърдя, че представената дисертация напълно отговаря на препоръчителните наукометрични критерии за присъждане на научни степени. Въз основа на гореизложеното давам **положителна оценка** и препоръчам на членовете на уважаемото НЖ да гласуват

даване на ОНС „доктор” на **Силви-Мария Тодорова Гюрова**, област на висше образование: 4. Природни науки, математика и информатика; професионално направление: 4.5. Математика; докторска програма: *Математи-ческо моделиране и приложение на математиката.*

СЪСТАВИЛ:

На основание
ЗЗЛД
Пр
Се
и
математическа физика”,
ИМИ – БАН, София

27 май 2026 г.
София